MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 8
9.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''' - 4\,y'' + 4\,y' = 0 \qquad (\star_0)$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 4\,\lambda^2 + 4\,\lambda = \lambda\,(\lambda-2)^2$$

besitzt die einfache reelle Nullstelle $\lambda_1 = 0$ sowie die doppelte reelle Nullstelle $\lambda_2 = 2$.
Damit bilden nach Satz 2.15 der Vorlesung die Funktionen φ_1, φ_2, $\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{0x} = 1 \quad , \quad \varphi_2(x) = e^{2x} \quad , \quad \varphi_3(x) = xe^{2x}$$

ein Fundamentalsystem von $(\star_0)$ und

$$\varphi(x) = c_1 + c_2\,e^{2x} + c_3\,xe^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung von $(\star_0)$.
Die Konstanten werden nun den gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ und $y''(0) = -8$ angepasst. Wegen

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= c_1 + c_2\,e^{2x} + c_3\,xe^{2x}\\
\varphi'(x) &= 2\,c_2\,e^{2x} + c_3\left(1\cdot e^{2x} + 2x\,e^{2x}\right) = e^{2x}\,(2\,x\,c_3 + 2\,c_2 + c_3)\\
\varphi''(x) &= 2\,e^{2x}\,(2\,c_3\,x + 2\,c_2 + c_3) + e^{2x}\,(2\,c_3) = e^{2x}\,(4\,c_3\,x + 4\,c_2 + 4\,c_3)\,,
\end{aligned}$$

ergibt sich aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 \quad &: \quad c_1 + c_2\cdot 1 + c_3\cdot 0\cdot 1 = 0 \iff c_1 + c_2 = 0\\
y'(0) = 1 \quad &: \quad 2\,c_2 + c_3 = 1\\
y''(0) = -8 \quad &: \quad 4\,c_2 + 4\,c_3 = -8 \iff c_2 + c_3 = -2,
\end{aligned}$$

woraus sich $c_2 = 3, c_3 = -5$ und $c_1 = -3$ ergibt.
Folglich ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -3 + 3\,e^{2x} - 5\,xe^{2x},$$

die Lösung des gestellten AWP.

2. a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = 0 \qquad (\star_0)$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 2$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4} \cdot i}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

χ hat also die beiden komplexen (einfachen) Nullstellen $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$.
Nach Satz 2.15 der Vorlesung bilden dann die beiden Funktionen
$\varphi_1,\, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{-1\,x}\cos(1x) = e^{-x}\,\cos x \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{-1\,x}\sin(1x) = e^{-x}\,\sin x$$

ein Fundamentalsystem von $(\star_0)$, und die allgemeine Lösung von $(\star_0)$ ist damit

$$\varphi(x) = \varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\sin x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Die allgemeine Lösung von $(\star_0)$ ist nach a)

$$\varphi(x) = \varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\sin x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -c_1e^{-x}\cos x - c_1e^{-x}\sin x - c_2e^{-x}\sin x + c_2e^{-x}\cos x \\
\varphi''(x) &= c_1e^{-x}\cos x + c_1e^{-x}\sin x + c_1e^{-x}\sin x - c_1e^{-x}\cos x \\
&\quad + c_2e^{-x}\sin x - c_2e^{-x}\cos x - c_2e^{-x}\cos x - c_2e^{-x}\sin x \\
&= 2c_1e^{-x}\sin x - 2c_2e^{-x}\cos x, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß φ in 0 ein lokales Extremum hat, ist $\varphi'(0) = 0$, also

$$0 = -c_1 + c_2, \quad \text{also} \quad c_1 = c_2.$$

Setze $c := c_1 = c_2$, dann ist also

$$\varphi(x) = ce^{-x}(\cos x + \sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ferner ist

$$\varphi''(0) = -2c \begin{cases} < 0 & , \text{ für } c > 0 \\ = 0 & , \text{ für } c = 0 \\ > 0 & , \text{ für } c < 0 \end{cases}.$$

Damit hat φ im Fall $c > 0$ in 0 ein (isoliertes) lokales Maximum (also keine lokales Minimum), und im Fall $c < 0$ in 0 ein (isoliertes) lokales Minimum. Im Fall $c = 0$ ist $\varphi(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, hat also ebenfalls in 0 ein lokales Minimum.
Insgesamt haben also genau die Lösungen

$$\varphi(x) = ce^{-x}(\cos x + \sin x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

für $c \leq 0$ in 0 ein lokales Minimum.

3. a) Da $\varphi(x) = x, x \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $(\star_0)$ ist, gilt

$$\varphi^{(n)}(x) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_2\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_0\varphi(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Mit $\varphi'(x) = 1$ und $\varphi^{(k)}(x) = 0$ für alle $k = 2, ..., n$, erhält man

$$a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

also $a_0 = a_1 = 0$. Damit lautet die Differentialgleichung $(\star_0)$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2y'' = 0 \qquad (\star_0).$$

Damit ist insbesondere auch $\psi(x) = 1, x \in \mathbb{R}$, eine Lösung von $(\star_0)$.

b) Das folgende Polynom 5. Grades in λ (mit Höchstkoeffizient 1) hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{(dreifach)} \quad , \lambda_4 = 2 + 3i, \;\; \lambda_5 = 2 - 3i \;:$$

$$\begin{aligned} &\lambda^3 \cdot (\lambda - (2+3i)) \cdot (\lambda - (2-3i)) \;=\; \lambda^3 \cdot (\lambda - 2 - 3i) \cdot (\lambda - 2 + 3i) \\ &= \lambda^3 \cdot \big((\lambda-2)^2 - (3i)^2\big) \;=\; \lambda^3 \cdot \big((\lambda-2)^2 + 9\big) \\ &= \lambda^3 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 9) \;=\; \lambda^3 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 13) \\ &= \lambda^5 - 4\lambda^4 + 13\lambda^3. \end{aligned}$$

Betrachte nun die homogene lineare DGL

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 13y^{(3)} = 0 \qquad (\star_0)$$

Diese hat obiges Polynom als charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 13\lambda^3.$$

Damit sind

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{0x} = 1 \\ \varphi_2(x) &= xe^{0x} = x \\ \varphi_3(x) &= x^2e^{0x} = x^2 \\ \varphi_4(x) &= e^{2x}\cos(3x) \\ \varphi_5(x) &= e^{2x}\sin(3x), \qquad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $(\star_0)$.

4. Wir betrachten die inhomogene lineare lineare DGL

$$y'' + y = x, \qquad (*)$$

sowie homogene lineare DGL

$$y'' + y = 0. \qquad (*_0)$$

<u>Allgemeine Lösung von $(*_0)$:</u>
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = i = 0 + 1i$ und $\lambda = -i$ (komplex, einfach).
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^{0x}\cos(1x) + c_2 e^{0x}\sin(1x) = \ c_1\cos x + c_2\sin x,\ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*)$:
Man überprüft sofort durch einsetzen, daß $\varphi_p(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$, eine Lösung von $(*)$ ist!
Alternativ durch Ansatz: Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = x$ vom Grade $m = 1$ und $a = 0$. Da 0 keine Nullstelle von χ ist, ist also ist die Vielfachheit $\alpha = 0$.

Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{ax} = (sx + t)$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = sx + t$ vom Grade $m + \alpha = 1 + 0 = 1$; Es ist dann

$$\begin{aligned} \varphi_p'(x) &= s \\ \varphi_p''(x) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_p \text{ Lösung von } (*) &\iff \varphi_p''(x) + \varphi_p(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff 0 + sx + t = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff s = 1 \ \ \wedge \ \ t = 0. \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_p(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:
Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = \ c_1\cos x + c_2\sin x + x,\ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Lösung des AWP:
Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \ c_1\cos x + c_2\sin x + x \\ \varphi'(x) &= \ -c_1\sin x + c_2\cos x + 1 \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, daß die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ erfüllt sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \ :& \quad c_1 = 0 \\ y'(0) = 1 \ :& \quad c_2 + 1 = 1 \iff c_2 = 0. \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

Lösung des AWP.

b) Wir bestimmen hier $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, daß die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erfüllt ist. Es ergibt sich aus $y(0) = 0$, daß $c_1 = 0$. Also sind

$$\varphi(x) = c\sin x + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

Lösungen des AWP.

c) Hier müßte für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ aufgrund der Anfangsbedingungen gelten

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \ : & \quad c_1 = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \ : & \quad - c_1 + 1 = 0 \Longleftrightarrow c_1 = 1, \end{aligned}$$

was nicht sein kann. Also ist das gegebene AWP nicht lösbar.